問　題　紙

$\boxed{1}$ $a>0$，$b>0$とする。点A$(0,a)$を中心とする半径rの円が，双曲線$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$と2点B(s,t)，C$(-s,t)$で接しているとする。ただし，$s>0$とする。ここで，双曲線と円が点Pで接するとは，Pが双曲線と円の共有点であり，かつ点Pにおける双曲線の接線と点Pにおける円の接線が一致することである。

(1) r，s，tを，aとbを用いて表せ。

(2) $\triangle$ABCが正三角形となるaとrが存在するようなbの値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数$f(x)$と$g(\theta)$を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$
$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1) 導関数$g'(\theta)$を求めよ。

(2) $g(\theta)$を求めよ。

(3) $y=g(\theta)$のグラフをかけ。

$\boxed{3}$ 行列$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$に対して，座標空間の点$\mathrm{P}_n$の座標$(a_n,b_n,c_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$を，

$(a_1,b_1,c_1)=(1,0,0)$，

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix},\quad c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_nb_n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

で定める。

(1) A^3を求めよ。

(2) 点P_2，P_3，P_4の座標を求めよ。

(3) 点P_nの座標を求めよ。

問題$\boxed{4}$は選択問題である。次の(A)(B)のいずれか一方を選択して解答せよ。どちらを選択したかを答案紙$\boxed{4}$の所定の欄に記入せよ。

$\boxed{4}$ **(A)** さいころを投げると，1から6までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころをn回$(n=1,2,3,\cdots)$投げるとき，出る目の積の一の位がj $(j=0,1,2,\cdots,9)$となる確率を$p_n(j)$とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$を，$p_n(1)$と$p_n(7)$を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$を求めよ。

(4) $p_n(5)$を求めよ。

$\boxed{4}$ **(B)** x，yを正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$をみたす組$(x,y)$をすべて求めよ。

(2) pを3以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$をみたす組$(x,y)$のうち，$2x+3y$を最小にする$(x,y)$を求めよ。